16/12/2015

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει και ο σύνθετος τύπος των 3/8 για n περιττό

$Q^{3/8}_{n+1}(f) = \frac{3h}{8}\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+2f(x_3)+3f(x_4)+\dots+2f(x_{n-3})+3f(x_{n-2})+3f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$

ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΤΟΥ SIMPSON.

Έστω $f\in C^4[a,b]$ και $Q^S_{n+1}(f)$ ο σύνθετος τύπος του Simpson ως προς της ομοιόμορφη διαμέριση $x_i = a+ih$, $i=0,1,\dots,n$, $h=\frac{b-a}{n}$. Τότε το σφάλμα $R^S_{n+1}(f)$ δίνεται ως:

$$\boxed{R^S_{n+1}(f) = -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\xi),\ \xi\in(a,b)}$$

Άσκηση: Για την προσέγγιση του $\int_0^1 xe^x dx$ πρόκειται να εφαρμοστούν οι σύνθετοι τύποι του Τραπεζίου κ' Simpson.

Τι n πρέπει να πάρουμε σε κάθε περίπτωση ώστε να εξασφαλισεί ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων;

Λύση: • Σύνθετος τύπος Τραπεζίου: Είναι $|R^T_{n+1}(f)| = \frac{b-a}{12}h^2|f''(\xi)|$

Και $f'(x) = (xe^x)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x \Rightarrow f''(x) = (2+x)e^x$

(Επαγ. $f^{(3)}(x) = (3+x)e^x$ $f^{(4)}(x) = (4+x)e^x$)

Άρα $R^T_{n+1}(f) = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{n^2}(2+\xi)e^\xi \underset{\xi\in(0,1)}{\leq} \frac{3e}{12n^2} = \frac{e}{4n^2}$

Άρα θα πρέπει $\frac{e}{4n^2} \leq \frac{1}{2}\cdot 10^{-6} \Leftrightarrow n^2 \geq \frac{e}{2}\cdot 10^6 \Rightarrow n \geq \sqrt{\frac{e}{2}}\cdot 10^3 \simeq 1165{,}8$

→ αφού ζητάμε ακρίβεια 6 δεκ. ψηφίων

Το μικρότερο n θα είναι: 1165

• Σύνθετος τύπος Simpson $\left|R_{n+1}(f)\right| = \frac{b-a}{180}h^4\left|f^{(4)}(\xi)\right| = \frac{1}{180}\cdot\frac{1}{n^4}(4+\xi)e^\xi \underset{\xi\in(0,1)}{\leq}$ $\frac{5e}{180n^4} = \frac{e}{36n^4}$ Άρα θα πρέπει $\frac{e}{36n^4} \leq \frac{1}{2}10^{-6} \Leftrightarrow n^4 \geq \frac{e}{18}\cdot 10^6 \Rightarrow$

$\Rightarrow n \geq \sqrt[4]{\frac{e}{18}10^6} \simeq 19{,}71 \Rightarrow$ Το μικρότερο n θα είναι 20 (άρτιος όπως πρέπει να είναι)

→ Αν δεν ήταν θα παίρναμε τον αμέσως επόμενο αριθμό

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> Στην πράξη εφαρμόζαμε τον απλό τύπο στο $[a,b]$, δηλ. $h=b-a$ για τον τραπέζιο ή $h=\frac{b-a}{2}$ για τον Simpson

- Στη συνέχεια υποδιπλασιάζουμε το h ή ισοδύναμα διπλασιάζουμε το n
$h \leftarrow \frac{h}{2}$, $n \leftarrow 2n$

- Υπολογίζουμε το σύνθετο τύπο (είτε για τραπέζιο είτε για Simpson)
- Αυτό συνεχίζεται επαναληπτικά
- Τερματίζουμε όταν οι 2 (τελευταίες) διαδοχικές προσεγγίσεις διαφέρουν απόλυτα όσο είναι το σφάλμα ανοχής:

$$|Q_{2n+1} - Q_{n+1}| < \underbrace{\varepsilon}_{\text{επιθυμητό σφάλμα / σφάλμα ανοχής}} \quad \left(\begin{array}{l}\text{στο προηγ. παρ.} \\ \text{είχαμε } \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}\end{array}\right)$$

<u>π.χ.</u> $h=b-a$, $n=1$ $Q_2^T = \frac{h}{2}(f(a)+f(b))$ $h \leftarrow \frac{h}{2}$ $n \leftarrow 2n = 2$

$Q_3^T = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \frac{f(x_2)}{2}\right)$ (Το $\frac{f(x_0)}{2}+\frac{f(x_2)}{2}=S$ το έχουμε υπολογίσει κ' αποθηκεύσει στο προηγ. βήμα → μετά $S \leftarrow S+f(x_1)$)

$h \leftarrow \frac{h}{2}$, $n \leftarrow 2n = 4$ $Q_5^T = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \frac{f(x_4)}{2}\right)$, $S \leftarrow S + \underbrace{f(x_1')}_{=f(a+h)} + \underbrace{f(x_3')}_{=f(a+3h)}$